RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI SONA

La propagazione delle onde elettromagnetiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 2 (1931), p. 108-141.

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1931__2__108_0>

LA PROPAGAZIONE
DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

di LUIGI SONA a *Prato*

Introduzione

1. La grandissima diffusione che hanno avuto in questi ultimi tempi i concetti e le questioni relative alle onde elettromagnetiche, mi induce a sperare che non sarà del tutto inutile rivederne la trattazione matematica partendo da premesse un po' diverse dalle solite, che rispecchiano però, il più fedelmente possibile, la natura fisica del fenomeno e permettono qualche semplificazione nel metodo e nei risultati.

In quest' ordine di idee, le ricerche matematiche si basano tutte sulle equazioni di MAXWELL che legano le componenti del campo elettrico con quelle del campo magnetico.

Indichiamo con **F**, **H** i vettori forza elettrica e forza magnetica, con c la velocità della luce nel vuoto, supponiamo che la propagazione avvenga appunto nel vuoto (ed in prima approssimazione quindi nell'aria) e che siano nulle le correnti convettive.

Avremo allora in questa forma le equazioni di MAXWELL-HERTZ:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{F} \end{aligned} \right.$$

$$(2) \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

quest' ultima esprimente una ben nota proprietà del campo magnetico.

Noi supporremo la propagazione delle onde avvenire all' esterno di una superficie σ chiusa sulla quale si immaginano noti i valori delle forze elettriche e magnetiche in ogni istante.

Supposto che all' istante $t = 0$ si inizi una perturbazione su σ, essa farà cambiare il campo delle forze elettromagnetiche nello spazio circostante esterno a σ e la perturbazione si propagherà con velocità c formando un' onda.

Il bordo dell' onda camminerà nello spazio e, ad ogni istante t, assumerà una conformazione σ_t, in modo che al tempo t la parte perturbata dello spazio sarà tutta compresa fra σ e σ_t. È evidente poi che la superficie σ_t, bordo d' onda, si ottiene portando sulle normali ai punti di σ, dei segmenti di grandezza ct.

Il problema da risolvere si può postulare così: (problema esterno) " *Date la forza elettrica* **F** *e la forza magnetica* **H** *sui punti della superficie* σ *fissa, ad ogni istante posteriore all' istante* $t = 0$, *calcolare il valore di dette forze in un punto* $P(\xi, \eta, \zeta)$ *esterno a* σ *in un istante* $\tau > 0$ *qualunque* „.

2. Poichè nello spazio circostante la σ noi supponiamo la non esistenza di cariche elettriche libere, avremo in questo spazio

$$(2') \qquad \operatorname{div} \mathbf{F} = 0 .$$

Per cui derivando le (1) rispetto a t ed eseguendo semplici sostituzioni, tenendo conto delle (2) e (2') si verifica subito che le $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{H}$ soddisfano all' equazione caratteristica delle onde:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \varphi = 0 .$$

Le formule di Kirchhoff e di Poisson sono però in un primo tempo insufficienti a risolvere il problema proposto in quanto le vibrazioni considerate sono di carattere trasversale.

In questo lavoro ci proponiamo di trovare, in ultima analisi, delle equazioni di rappresentazione le quali si potrebbero considerare come estensioni della formula originale del KIRCHHOFF. Queste formule furono già ottenute, in forma alquanto diversa, dal LOVE (1) e dal TEDONE (2) rispettivamente nel 1901 e nel 1916 con procedimenti del tutto differenti ed in ogni caso abbastanza complicati. È da notarsi però che il problema considerato dal TEDONE è più generale di quello trattato dal LOVE e di cui ora ci occupiamo, in quanto egli suppone la presenza di correnti convettive. Il TEDONE però non esplicita le sue formule nel caso generale e solo per il caso particolare già trattato dal LOVE, dà una formula praticamente risolutiva.

Sia il LOVE che il TEDONE hanno considerato il problema come propagazione all'interno di una superficie σ portante i dati, e solo per successiva estensione hanno considerato la propagazione all'esterno che richiede però speciali condizioni di continuità e di convergenza all'infinito per le funzioni impiegate, condizioni che non sembra abbiano significato fisico concreto.

La nostra impostazione del problema esterno nel modo che ulteriormente sarà specificato oltre ad essere più conforme alla natura fisica del fenomeno, (si consideri che sarebbe difficilmente concepibile una propagazione regolare di onde all'interno di una superficie chiusa per effetto delle molteplici, varie, e complesse riflessioni ed interferenze delle onde stesse) elimina anche queste condizioni restrittive.

La impostazione del problema nello spazio a quattro dimensioni (x, y, z, t), la considerazione delle condizioni soddisfatte al bordo dell'onda e l'applicazione del metodo delle caratteristiche, permetteranno di giungere alla sua soluzione nel modo più sicuro e più semplice possibile. Il lavoro è diviso in questo modo:

Cap. I. - Le condizioni soddisfatte al bordo dell'onda.

Cap. II. - Ricerca di una formula di reciprocità nello spazio a quattro dimensioni.

(1) A. E. H. LOVE: *The integration of the equations of propag. of Electric Waves.* (Philosophical Trans. of the Royal Soc. of London S. A. Vol. 197 pg. 1-45). - (Mem. A).

(2) O. TEDONE: *Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell.* (Rend. R. Acc. Lincei Vol. XXV).

Cap. III. – Le soluzioni caratteristiche delle equazioni di MAXWELL-HERTZ.

Cap. IV. – Integrazione delle equazioni di MAXWELL-HERTZ.

Appendice. – Dimostrazione dell' equivalenza delle formule di LOVE a quelle di TEDONE (1).

CAP. I. – **Condizioni soddisfatte al bordo dell' onda.**

Quando una perturbazione di una natura qualsiasi, si propaga in un mezzo con velocità c costante in ogni direzione, si forma un bordo d'onda che divide la parte del mezzo perturbata da quella non perturbata. Non è sempre uguale però il comportamento delle funzioni caratterizzanti la perturbazione, nel passaggio attraverso il bordo dell' onda.

In alcuni casi le funzioni in parola appaiono continue assieme alle loro derivate prime sul bordo dell' onda. In altri casi sono continue le funzioni e non lo sono le derivate prime, in altri ancora sono discontinue anche le funzioni medesime.

Il Sig. A. E. H. LOVE (2) ha fatto vedere come, solo nel primo caso la formula di KIRCHHOFF conduca a risultati certi. Negli altri casi, e particolarmente nel nostro caso delle onde elettromagnetiche, detta formula non è applicabile o per lo meno

(1) Oltre i lavori già citati nel testo entrano in quest' ordine di considerazioni i seguenti:

E. LAURA – *Sopra il problema esterno della dinamica dei mezzi elastici isotropi.* (Mem. Acc. Sc. Torino, S. II; Vol. LXIV). – (Mem. A).

E. LAURA – *Sopra le formule di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica.* (Rend. Acc. Lincei 1914). – (Nota B).

O. TEDONE – *Sulle vibrazioni dei corpi elastici isotropi.* (Mem. Acc. Sc. Torino, Vol. 47). – (Mem. B).

C. SOMIGLIANA – Note citate nel testo.

L. SONA – *Sulle formule di rappresentazione degli integrali della dinamica elastica.* (Atti R. Istit. Veneto 1927-29, Tomo 88, P. II.).

Recentemente il Prof. TONOLO in una nota all' Accademia dei Lincei e in una memoria negli Annali di Matematica ritratta con metodi suoi personali lo stesso problema sempre però come problema interno.

(2) A. E. H. LOVE – *Waves motion whit discontinuities in wave-front.* (Proc. of the London Math. Society. S. 2., Vol. I., P. I., pg. 37). – (Mem. B).

non conduce a risultati soddisfacenti. Molto interessanti sono le argomentazioni del Love a questo riguardo e per esse rimandiamo il lettore alla memoria originale.

Ci preme solo rilevare quanto è necessario allo svolgimento del lavoro. Nella propagazione delle vibrazioni elastiche e nella teoria del suono è necessario ammettere la continuità delle componenti di spostamento nell'attraversare il bordo dell'onda per evitare rotture nel mezzo; nelle componenti, invece, del campo elettromagnetico non è necessario ammettere tale continuità potendosi benissimo pensare che dette forze varino bruscamente da un certo valore a zero attraversando il bordo.

Sul bordo però dovranno essere soddisfatte certe condizioni derivanti dalle equazioni (1), (2) e che ora ci proponiamo di studiare.

La superficie σ su cui sono dati i valori del campo, sia all'istante $t = 0$ bordo d'onda, la quale si propaghi con una certa velocità ω.

Vogliamo trovare, in conseguenza delle (1) i legami fra le $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$ quando esse si considerino in un punto P del bordo avanzantesi: vedremo anche poi che la velocità ω non può differire dalla costante c che compare nelle (1) che è eguale alla velocità della luce nel vuoto.

Chiamiamo ΔV il volume, racchiudente il punto P del bordo, il cui contorno sia costituito da due elementi $\Delta\sigma_0$ e $\Delta\sigma_1$ di superficie presi su due posizioni σ_0 e σ_1 del bordo racchiudenti la σ_t, corrispondenti ai tempi t_0 e t_1 rispettivamente, e dai segmenti di normale di lunghezza $\omega(t_1 - t_0)$ che congiungono i contorni di $\Delta\sigma_0$ e $\Delta\sigma_1$. Integriamo i due membri delle equazioni (1) nel volume ΔV.

Considerando i $\Delta\sigma$ come infinitesimi del secondo ordine, assumendo come infinitesimo principale $t_1 - t_0$ ed osservando che $\mathbf{F}(t_1) = 0$, si giunge, trascurando infinitesimi di ordine superiore al secondo, a trasformare i primi membri così:

$$\int_{\Delta V} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} dV = -\frac{\omega}{c} \Delta\sigma \cdot \mathbf{F}$$

$$\int_{\Delta V} -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\, dV = +\frac{\omega}{c}\Delta\sigma\cdot\mathbf{H}$$

dove **F** e **H** si intendono presi nel punto P del bordo.

L'integrazione dei secondi membri delle stesse equazioni (1) quando si trasformino gli integrali di volume in integrali di superficie, e inoltre si osservi che il contributo portato dalla $\Delta\sigma_1$ è nullo perchè in essa ancora non è giunta la perturbazione, e che quello dato dalla superficie luogo delle normali differisce da zero per infinitesimi di terzo ordine almeno, si riduce a:

$$\int_{\Delta\sigma} \mathbf{H}\wedge\nu\, d\sigma = -\Delta\sigma\cdot\mathbf{H}\wedge\nu\,; \qquad \int_{\Delta\sigma} \mathbf{F}\wedge\nu\, d\sigma = -\Delta\sigma\cdot\mathbf{F}\wedge\nu$$

essendo ν un vettore unitario diretto secondo la normale esterna a σ.

Potremo dunque scrivere dividendo per $\Delta\sigma$.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\omega}{c}\mathbf{F} &= \mathbf{H}\wedge\nu \\ -\frac{\omega}{c}\mathbf{H} &= \mathbf{F}\wedge\nu \end{aligned}\right.$$

Perchè queste due relazioni siano compatibili deve essere $\omega = c$.

Infatti moltiplicando esternamente la prima per ν e sostituendo ad $\mathbf{F}\wedge\nu$ il valore dato dalla seconda si ha:

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{H} = -\mathbf{H} + \nu\,(\mathbf{H}\times\nu)\,.$$

Ma $\mathbf{H}\times\nu = 0$ per cui $\omega = c$.

Si deduce come prima conseguenza che la velocità di propagazione del bordo è eguale alla costante c delle equazioni (1) cioè alla velocità della luce. Le due relazioni trovate si scrivono allora:

(4) $$\mathbf{F} = \mathbf{H}\wedge\nu\,; \qquad -\mathbf{H} = \mathbf{F}\wedge\nu$$

che sono appunto le condizioni a cui devono soddisfare la forza elettrica e magnetica sul bordo dell'onda propagantesi.

Il loro significato fisico è il seguente:

a) Sopra il bordo dell'onda le forze elettriche e magnetiche sul lato perturbato sono tangenti al bordo stesso. (Infatti dalle (4) si deduce $\mathbf{F} \times \nu = \mathbf{H} \times \nu = 0$).

b) Le direzioni della forza elettrica e della forza magnetica sono fra di loro perpendicolari. (Infatti $\mathbf{F} \times \mathbf{H} = - \mathbf{F} \times \mathbf{F} \wedge \nu = 0$).

c) Le direzioni della forza elettrica, della forza magnetica e della normale esterna al bordo costituiscono nell'ordine scritto un sistema triortogonale detrorso.

Le condizioni trovate valgono indipendentemente dalle ipotesi che la propagazione avvenga nell'etere o nel vuoto.

È opportuno fare però una considerazione. Nel caso dell'etere viene considerata una quantità (u, v, w) detta " spostamento magnetico ,, di cui la forza magnetica è la derivata rispetto al tempo, e la forza elettrica è proporzionale alla rotazione.

Orbene, le condizioni (4) corrispondono all'annullarsi sul bordo della quantità (u, v, w) ciò che è necessario per assicurare la continuità del mezzo etere come è necessario nella dinamica elastica per assicurare la continuità del mezzo solido. Nella ipotesi dell'etere si avrebbe quindi, anche riguardo alle condizioni sul bordo dell'onda, un perfetto parallelo colla teoria della elasticità.

Cap. II. - **La formula di reciprocità.**

La formula che andiamo a stabilire fu considerata dal Tedone nel suo lavoro pel 1916 (*A*) ed è analoga a quella da lui stabilita nella memoria (*B*) per le equazioni della elasticità e che fu considerata sotto un nuovo punto di vista dal Laura (*B*). Essa in fondo si propone lo stesso scopo della formula di Green per le funzioni armoniche e di quella di Betti per l'elasticità. Ne differisce però alquanto per il fatto che essa viene stabilita nello spazio a quattro dimensioni. Più analoga a quella di Betti si presenta invece quella usata dal LOVE (A) per arrivare all'integrazione delle stesse equazioni di MAXWELL.

La considerazione del tempo come una dimensione rende un prezioso servizio alla nostra trattazione, fissando, si può dire, in una questione geometrica, una questione meccanica.

Si abbiano dunque nello spazio (x, y, z, t) due coppie di vettori, paralleli allo spazio (x, y, z):

$$\mathbf{F},\ \mathbf{H}; \qquad \mathbf{F}'\ \mathbf{H}'$$

finiti e continui in tutta una regione S_4 di detto spazio, limitata da una varietà Σ chiusa, a tre dimensioni e soddisfacenti, ciascuna di esse alle equazioni di MAXWELL-HERTZ:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} \qquad - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{F}\,.$$

$$\text{(1')} \qquad \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}' \qquad - \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{F}'\,.$$

Moltiplichiamo ora internamente le (1) per $\mathbf{H}'$ e $\mathbf{F}'$ rispettivamente, le (1') per $\mathbf{H}$ e $\mathbf{F}$. Addizionando poi membro a membro le (1) così trasformate e sottraendovi la somma delle (1') otteniamo con lievi semplificazioni:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}' \times \mathbf{F} - \mathbf{F}' \times \mathbf{H}) = -c\,(\operatorname{div} \mathbf{H}' \wedge \mathbf{H} + \operatorname{div} \mathbf{F}' \wedge \mathbf{F})$$

Ed essendo valida questa relazione in tutti i punti di S_4 si avrà anche:

$$\int_{S_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}' \times \mathbf{F} - \mathbf{F}' \times H) + c \operatorname{div} (\mathbf{H}' \wedge \mathbf{H} + \mathbf{F}' \wedge \mathbf{F}) \right\} dS = 0\,.$$

E tı͜sformando in integrali di superficie:

$$\int_{\Sigma} \left\{ (\mathbf{H}' \times \mathbf{F} - \mathbf{F}' \times \mathbf{H}) \cos nt + c(\mathbf{H}' \wedge \mathbf{H} + \mathbf{F}' \wedge \mathbf{F}) \times \mathbf{N} \right\} d\Sigma$$

dove con **N** abbiamo indicato un vettore dello spazio xyz proiezione ortogonale sullo spazio stesso di un vettore unitario di S_4 avente la direzione della normale interna n alla varietà Σ.

Poniamo ora:

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathbf{\Phi} = \mathbf{F}' \cos nt + c\,\mathbf{H}' \wedge \mathbf{N} \\ \mathbf{\Psi} = \mathbf{H}' \cos nt - c\,\mathbf{F}' \wedge \mathbf{N}. \end{cases}$$

Arriviamo allora alla formula seguente:

$$(6) \qquad \int_\Sigma (\mathbf{F} \times \mathbf{\Psi} - \mathbf{H} \times \mathbf{\Phi})\, d\Sigma = 0$$

che è appunto la formula di reciprocità cercata.

Notiamo che per ora la Σ è una varietà qualunque a tre dimensioni racchiudente lo spazio S_4: vedremo più avanti come essa debba essere convenientemente particolarizzata per le esigenze del problema.

Cap. III. - Soluzioni caratteristiche.

Il metodo di integrazione delle equazioni (1) dipende dall'applicazione della formula di reciprocità trovata a due sistemi di soluzioni delle dette equazioni, di cui uno ha forma generica e l'altro è particolarizzato convenientemente. A questo ultimo sistema particolare si dà il nome di soluzione caratteristica ed ha lo stesso ufficio che ha, per le funzioni armoniche, la soluzione $\frac{1}{r}$.

Nella teoria dell'elasticità si considerano pure degli "spostamenti caratteristici", soluzioni particolari delle equazioni relative e che hanno un ufficio analogo.

Noi appunto, riattaccandoci alla dinamica elastica, ricercheremo due tipi fondamentali di soluzioni delle equazioni di Maxwell, di semplice espressione e di significato fisico evidente.

Ecco quali considerazioni ci spingono a fare il parallelo colla elasticità. Supponiamo come fa il LARMOR ([1]) nella sua teoria dinamica dell'etere, che la forza magnetica rappresenti velocità dell'etere e si consideri lo spostamento **W** corrispondente a tale velocità. Avremo allora tenendo conto delle (1):

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}; \qquad \mathbf{F} = c \operatorname{rot} \mathbf{W} \tag{8}$$

e ancora:

$$-\frac{1}{e} \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = c \operatorname{rot}^2 \mathbf{W}$$

cioè:

$$c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{W} - c^2 \Delta_2 \mathbf{W} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = 0\,. \tag{9}$$

L'equazione (9) corrisponde alla propagazione delle onde trasversali nei mezzi elastici solidi. L'etere si può quindi pensare come un mezzo elastico: **W** è allora un reale spostamento dell'etere stesso; la forza magnetica è la velocità di spostamento e la forza elettrica risulta proporzionale alla rotazione relativa al medesimo spostamento. Il parallelo quindi è perfetto. Si dimostra anche che la condizione $\mathbf{W} = 0$ che dev'essere verificata sul bordo dell'onda per non rompere la continuità del mezzo, equivale alle condizioni (3) che abbiam trovato al Cap. I.

Senza indagare sul grado di attendibilità della ipotesi di LARMOR possiamo quindi, riferendoci solo ai risultati formali, affermare che ogni spostamento corrispondente alle onde trasversali di un solido elastico può essere interpretato come uno "spostamento magnetico" dell'etere e dedurne in conseguenza le espressioni per la forza elettrica e la forza magnetica.

Non è qui il caso di fare la storia di queste soluzioni caratteristiche delle equazioni della elasticità. Diremo solo che esse

([1]) Philosophical Transactions of the Royal Soc. of London (Ser. A) Vol. CLXXX, 1894.

furono dapprima considerate dallo STOKES (1), poi successivamente modificate e cambiate di forma dal LOVE (2) e dal SOMIGLIANA (3). Quest' ultimo anzi, per primo rivelò tutta l' importanza che queste formule, trasportate nel campo statico, hanno nei riguardi della integrazione delle equazioni indefinite dell' equilibrio.

Noi ci serviremo dell' espressione particolarmente adatta che ad esse diede il LAURA (4).

Dette (u, v, w) le componenti di $\mathbf{W}$, porremo dunque:

$$
(10) \qquad \begin{aligned}
(u, v, w) = c \Bigg[& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right) \frac{f\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} - \\
& - \left(\frac{1}{c^2}, 0, 0\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{f\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} \Bigg]
\end{aligned}
$$

dove

$$
r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}
$$

ed è quindi la distanza fra il generico punto (x, y, z) e il punto fisso di coordinate (ξ, η, ζ), e $f\left(t \pm \frac{r}{c}\right)$ indica che la funzione generica f dipende dalla sola variabile $\left(t \pm \frac{r}{c}\right)$.

Dette (X, Y, Z) le componenti della forza elettrica, (U, V, W) quelle della forza magnetica, otteniamo allora come soluzioni caratteristiche delle equazioni di MAXWELL-HERTZ.:

(1) STOKES – *On the dynamical Theory of Difraction.* – Cambr. Philos. Trans. Vol. 9 (1849).

(2) A. E. H. LOVE – *The propagation of Wave motion etc.* – Proc. of. the London Math. Soc. Vol. I. Sez. II.

(3) C. SOMIGLIANA – *Sulla propagazione delle onde nei mezzi isotropi.* – Atti Acc. Sc. Torino, Vol. 41. pg. 60.

(4) E. LAURA – Nota A citata pg. 15. Vedi anche al riguardo la mia nota già citata.

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
(X,\,Y,\,Z) &= \left(0,\ -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Omega}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)\\
(U,\,V,\,W) &= c\left[\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial z}\right) -\right.\\
&\qquad \left. -\left(\frac{1}{c^2},\ 0,\ 0\right)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}\right]
\end{aligned}
\right.
$$

dove abbiamo posto $\Omega = \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{f\left(t \pm \dfrac{r}{c}\right)}{r}$.

Un secondo tipo di soluzioni si ottiene invece considerando la rotazione dei secondi membri delle (10) moltiplicati per c.

Posto allora:

$$
\Omega = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{f\left(t \pm \dfrac{r}{c}\right)}{r}
$$

avremo:

$$
(10')\qquad (u,\,w,\,w) = \left(0,\ -\frac{\partial \Omega}{\partial z},\ \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)
$$

e in conseguenza [1]:

$$
(11')\quad \left\{
\begin{aligned}
(X,\,Y,\,Z) &= -c\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial z}\right) +\\
&\qquad + \left(\frac{1}{c^2},\ 0,\ 0\right)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}\\
(U,\,V,\,W) &= \left(0,\ -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Omega}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

[1] Per quanto riguarda le trasformazioni adoperate in questi passaggi, è da ricordare che essendo la Ω soluzione della: $\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 \Omega = 0$ si ha sempre: $\Delta_2 \Omega = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}$.

Nelle perturbazioni del I. tipo la forza magnetica è assiale secondo la direzione dell'asse x e le linee di forza elettrica sono circoli intorno all'asse x medesimo. Nel II. tipo la forza elettrica è assiale secondo l'asse x e le linee di forza magnetica sono circoli intorno all'asse x medesimo.

È superfluo aggiungere che, eseguendo delle sostituzioni circolari sulle (11) e (11') si otterrebbero ancora quattro sestuple di soluzioni corrispondenti a sorgenti di perturbazioni nella direzione degli altri due assi in modo analogo all'asse x. Nella nostra trattazione ci limiteremo ad adoperare solo un caso particolare della soluzione (11) che ci condurrà ad ottenere la prima componente della forza elettrica. Ovviamente le altre cinque sestuple si adoprerebbero per le rimanenti due componenti della forza elettrica e per le tre della forza magnetica.

Cap. IV. - Integrazione delle equazioni di Maxwell - Hertz

1. Vediamo ora come si possa giungere alla integrazione delle equazioni di propagazione delle onde elettromagnetiche adoperando alcune particolari soluzioni caratteristiche fra quelle viste sopra, e applicando convenientemente la formula di reciprocità trovata.

Il metodo che seguiremo è basato essenzialmente sulla considerazione del tempo come quarta coordinate ed ancor più sull'uso delle "*varietà caratteristiche*". Questo modo di procedere fu introdotto dal Volterra ed è oggi largamente usato in tutte le questioni in cui entrano dei sistemi di equazioni differenziali

---

Abbiamo quindi sostituito a $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}$ l'espressione $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$.

È facile poi verificare che le espressioni (11) e (11') soddisfano alle equazioni della elettricità, come pure che le (10) e (10') soddisfano la relazione (9).

a derivate parziali a tre o più variabili indipendenti di tipo iperbolico ([1]).

Abbiamo già dato nella introduzione l' enunciato del problema, ora dobbiamo vedere com' esso si traduce nello spazio a quattro dimensioni.

Indicheremo con $P(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ il punto in cui si ricercano i valori della forza elettrica e magnetica.

La superficie σ portante i dati si muta, al variare di t, in un cilindroide tridimensionale colle generatrici parallele all' asse t, che chiameremo Σ_1. Una sezione di questa varietà con un iperpiano perpendicolare all' asse t dà sempre la superficie σ considerata però nei vari istanti.

Il bordo dell' onda σ_t darà luogo ad una varietà Σ_2 ottenuta conducendo dai punti di σ le rette con pendenza $\frac{1}{c}$ in modo che le loro proiezioni sull' iperpiano $t = 0$ siano le normali alla σ. Una sezione d' essa coll' iperpiano $t = \tau$ dà appunto la σ_τ.

La regione perturbata dello spazio sarà allora sempre compresa fra la Σ_1 portante i dati e la Σ_2, bordo dell' onda.

Indichiamo poi con Σ_3 la varietà conica caratteristica di equazione:

$$(t - \tau)^2 - \frac{r^2}{c^2} = 0 \tag{12}$$

dove come il solito:

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}\,.$$

Consideriamo infine la varietà cilindrica Σ_4 di equazione:

$$r = \varepsilon \tag{13}$$

([1]) Per maggiori ragguagli v. V. Volterra. – *Sur le vibrations des corps elestiques.* (Acta Math. t. XVIII) e R. D' Adhémar – *Les equations aux derivées partielles à caractéristiques réelles.* – Coll. Scientia n. 29, Paris – Gauthier-Villars.

colle generatrici parallele all' asse t e il cui asse ha per traccia sull' iperpiano $t = 0$ il punto $(\xi\ \eta\ \zeta)$: ε è un valore costante, sufficientemente piccolo, che faremo poi tendere a zero.

Le sezioni della Σ_4 cogli iperpiani $t = \text{cost.}$ sono sfere con centro in P e raggio ε.

Si potrebbe allora enunciare il problema così:

Dati i valori della forza elettrica e magnetica su Σ_1, *calcolarne il valore nel punto* $P\ (\xi, \eta, \zeta, \tau)$ *compreso fra* Σ_1 e Σ_2.

2. Consideriamo ora due coppie di vettori soddisfacenti alle equazioni (1):

$$(\mathbf{F}\ ;\ \ \mathbf{H})$$

$$(\mathbf{F}'\ ;\ \ \mathbf{H}')$$

i primi due finiti e continui nello spazio al finito, i secondi con un polo nel punto $P(\xi\eta\zeta)$.

Nello spazio S_4 limitato dalle Σ_1, Σ_2, Σ_3, escludendo colla Σ_4 il punto $P(\xi\eta\zeta)$, le due coppie saranno finite e continue colle derivate prime e seconde. Potremo allora applicare la formula di reciprocità (6). Avremo dunque:

$$\int_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4} (\mathbf{F} \times \mathbf{\Psi} - \mathbf{H} \times \mathbf{\Phi})\, d\Sigma = 0 \tag{6'}$$

dove $\mathbf{\Psi}$ ed $\mathbf{\Phi}$ sono funzioni di $\mathbf{F}'$, $\mathbf{H}'$ che si costruiscono mediante le formule (5).

Dimostriamo dapprima che il contributo dato da Σ_2 all' integrale (6') è eguale a zero.

Infatti sulla Σ_2 bordo dell' onda si ha:

$$\cos nt = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\,.$$

E ancora [1]:

[1] Si ricordi che $\mathbf{N}$ è la proiezione sul piano xyz di un vettore unitario perpendicolare alla Σ_2 internamente; ν poi è un vettore unitario perpendicolare alla σ e quindi anche alla σ_t.

$$\mathbf{F}'\wedge\mathbf{N} = -\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\mathbf{F}'\wedge\mathbf{v}\ ; \qquad \mathbf{H}'\wedge\mathbf{N} = -\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\mathbf{H}'\wedge\mathbf{v}\,.$$

Per cui:

$$\int_{\Sigma_2}(\mathbf{F}\times\mathbf{\Psi} - \mathbf{H}\times\mathbf{\Phi})\,d\Sigma =$$

$$\int_{\Sigma_2}\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\left[\mathbf{F}\times(\mathbf{H}' + \mathbf{F}'\wedge\mathbf{v}) - \mathbf{H}\times(\mathbf{F}' - \mathbf{H}'\wedge\mathbf{v})\right]d\Sigma$$

che è nullo per le condizioni (5) verificate sul bordo dell'onda.

3. Assumiamo ora come perturbazioni caratteristiche i vettori $\mathbf{F}'$ e $\mathbf{H}'$ le cui componenti sono date dalle (11) del Cap. III.

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &X' = 0 \qquad Y' = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Omega}{\partial x} \qquad Z' = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Omega}{\partial y} \\ &U' = c\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}\,; \\ &V' = c\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y}\,; \qquad W' = c\frac{\partial^2\Omega}{\partial z\,\partial x} \end{aligned}\right.$$

e diamo a Ω il seguente valore:

$$(14)\qquad \Omega = \frac{\left(t - \tau + \frac{r}{c}\right)^3}{3\,!\,r}\,.$$

Allora sul cono caratteristico Σ_3 si avrà:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{H}' = 0$$

perchè queste quantità contengono un fattore

$$t-\tau+\frac{r}{c}$$

che si annulla sulla Σ_3 di equazione : $(t-\tau)^2-\frac{r^2}{c^2}=0.$

Anche il contributo portato dalla Σ_3 all' integrale (6') è quindi eguale a zero.

4. La formula (6') rimane dunque:

$$\int_{\Sigma_1+\Sigma_4}(\mathbf{F}\times\mathbf{\Psi}-\mathbf{H}\times\mathbf{\Phi})\,d\Sigma=0\,. \tag{15}$$

Consideriamo dapprima la parte relativa al cilindroide Σ_4. Su di esso si ha:

$$\cos nt=0 \qquad \mathbf{N}=\operatorname{grad} r$$

cioè
$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\partial r}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial r}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial r}{\partial z}\,.$$

E quindi dette Φ_1, Φ_2, Φ_3 le componenti di $\mathbf{\Phi}$ e

Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 le componenti di $\mathbf{\Psi}$

si avrà ricordando le (5) e le (11):

$$\Phi_1=c\left(V'\frac{\partial z}{\partial r}-W'\frac{\partial y}{\partial r}\right)=c^2\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial r}{\partial y}\right)=0$$

$$\Phi_2=c\left(W'\frac{\partial x}{\partial r}-U'\frac{\partial z}{\partial r}\right)=$$

$$=c^2\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}\frac{\partial r}{\partial z}\right)=$$

$$=c^2\left[\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial z}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\partial r}{\partial z}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Omega)}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial z}\right]=$$

$$= c^2 \left[- \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\Omega)}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial z} \right] =$$

$$= \frac{c^2}{r} \frac{\partial r}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 (r\Omega)}{\partial r^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right]$$

$$\Phi_3 = c \left(U' \frac{\partial r}{\partial y} - V' \frac{\partial r}{\partial z} \right) = - \frac{c^2}{r} \frac{\partial r}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 (r\Omega)}{\partial r^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right]$$

e poi:

$$\Psi_1 = c \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right]$$

$$\Psi_2 = - c \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\Psi_3 = - c \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} .$$

Allora la parte della (15) relativa al cilindroide Σ_4 si scriverà:

$$I = \int_{\Sigma_4} \left\{ c \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \left[X \left(\left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right) - Y \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} - Z \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial z} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{c^2}{r} \left[\frac{\partial^2 (r\Omega)}{\partial r^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right] \left(V \frac{\partial r}{\partial z} - W \frac{\partial r}{\partial y} \right) \right\} d\Sigma .$$

Di questo integrale dobbiamo trovare il limite quando il raggio del cilindroide diventi eguale a zero. Siccome poi la quantità r viene quì considerata sempre alla superficie del cilindroide Σ_4, essa coincide col raggio del cilindroide che avevamo indicato con ε. Ad evitare doppie notazioni ed inutili complicazioni di scrittura useremo solo la notazione r.

Si ha allora:

$$d\Sigma_4 = r^2 d\omega \, dt .$$

Essendo ω la superficie sferica di raggio 1 e centro il punto $P(\xi, \eta, \zeta)$. Evidentemente ω va esteso da 0 a 4π e t da $\frac{r_0}{c}$ a τ, essendo r_0 la distanza minima di $P(\xi, \eta, \zeta)$ dalla superficie σ.

Ed anche:

$$\lim_{r=0}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = \lim_{r=0}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{3}\lim\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{r=0}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \lim_{r=0}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

$$\lim_{r=0} r^2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \lim_{r=0} r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\left(t-\tau+\frac{r}{c}\right)^2}{2r} = -\frac{(t-\tau)^2}{2}$$

$$\lim_{r=0} r^2\left(\frac{\partial^2 (r\Omega)}{\partial r^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) = \lim_{r=0}\left(-r^2\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) = \frac{(t-\tau)^3}{3\,!}$$

$$\lim_{r=0}\frac{1}{r}\int_0^{4\pi} d\omega\left(V\frac{\partial r}{\partial z} - W\frac{\partial r}{\partial y}\right) =$$

trasformando in integrale di volume:

$$= \lim_{r=0}\frac{1}{r}\int_0^{4\pi}\frac{r}{3}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right)d\omega = \frac{1}{3}\cdot 4\pi\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta\\ z=\zeta}}.$$

E anche tenendo conto delle (1)

$$= -\frac{4\pi}{3c}\frac{\partial X(\xi\eta\zeta)}{\partial t}.$$

Si ha allora riassumendo:

$$\lim_{r=0} I = 4\pi \int_{\frac{r_0}{c}}^{\tau} \left[-c \frac{(t-\tau)^2}{2} \cdot \frac{2}{3} X(\xi \eta \zeta t) + \right.$$

$$\left. + \frac{c}{3} \frac{(t-\tau)^3}{3\,!} \frac{\partial X(\xi \eta \zeta t)}{\partial t} \right] dt$$

che possiamo anche scrivere cambiando i segni e supponendo quindi di cambiar membro a questa parte nella (15):

$$(16) \qquad A = 4\pi \int_{\frac{r_0}{c}}^{\tau} dt \left\{ c \frac{(t-\tau)^2}{2} X(P, t) - \frac{c}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left[X(P, t) \frac{(t-\tau)^3}{3} \right] \right\}.$$

Eseguiamo ora una triplice derivazione rispetto a τ, che poi eseguiremo anche nell'altra parte della (15).

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = 4\pi \int_{\frac{r_0}{c}}^{\tau} dt \left\{ -c\, X(P, t)\,(t-\tau) + \frac{c}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left[X(P, t) \frac{(t-\tau)^2}{2} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = 4\pi \int_{\frac{r_0}{c}}^{\tau} dt \left\{ cX(P, t) - \frac{c}{3} \frac{\partial}{\partial t} [X(P, t) \cdot (t-\tau)] \right\}$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} = 4\pi c\, X(P, \tau) - \frac{4\pi c}{3} X\left(P, \frac{r_0}{c}\right).$$

Ma al tempo $\frac{r_0}{c}$ la perturbazione ancora non è arrivata in $P(\xi, \eta, \xi)$ quindi: $X\left(P, \frac{r_0}{c}\right) = 0$ e si ha come risultato finale di tutte le operazioni eseguite sulla parte delle (15) relativa a Σ_4, avendo anche supposto di cambiare membro alla parte stessa:

$$4 \pi c X (\xi, \eta, \zeta, \tau) . \tag{17}$$

5. Vediamo ora su Σ_1. Si ha intanto:

$$\cos nt = 0 \qquad \mathbf{N} = \nu \quad \text{cioè} \quad \cos N x = \cos \nu x \quad \text{ecc.}$$

Si osservi poi che l'integrazione estesa a Σ_1 è il prodotto di due integrazioni: la prima estesa alla superficie data σ, la seconda lungo l'asse del tempo da 0 a $\tau - \frac{r}{c}$ Si ha cioè:

$$\int_{\Sigma_1} f d\Sigma = \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_\sigma f d\sigma .$$

Avremo allora tenendo conto anche delle (5):

$$\int_{\Sigma_1} (\mathbf{F} \times \mathbf{\Psi} - \mathbf{H} \times \mathbf{\Phi}) \, d\Sigma = \tag{18}$$

$$= \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_\sigma d\sigma \left\{ -c \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \left(Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) + \right.$$

$$+ c \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \left(X \frac{\partial y}{\partial \nu} - Y \frac{\partial x}{\partial \nu} \right)$$

$$- c^2 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \left(W \frac{\partial y}{\partial \nu} - V \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \left(U \frac{\partial z}{\partial \nu} - W \frac{\partial x}{\partial \nu} \right) + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} \left(V \frac{\partial x}{\partial \nu} - U \frac{\partial y}{\partial \nu} \right) \right]$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \left(W \frac{\partial y}{\partial \nu} - V \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) \right\} .$$

Trasformeremo il secondo membro della (18) ed eseguiremo contemporaneamente la triplice derivazione rispetto a τ.

Riferendoci alla prima riga poniamo:

$$B = -\int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_\sigma c \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \cdot \left(Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) d\sigma .$$

Essendo Ω funzione di r abbiamo: $\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}$; ma Z ed X sono funzioni delle (x, y, z) e non delle (ξ, η, ζ). Potremo dunque scrivere (¹):

$$B = -\int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_\sigma d\sigma \cdot c \frac{\partial \Omega}{\partial t} \left(Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_\sigma c \frac{\partial \Omega}{\partial t} \left(Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) d\sigma .$$

Se f è una funzione di t indicheremo con $[f]_c$ il valore che questa funzione assume per $t = \tau - \frac{r}{c}$.

Avremo allora eseguendo le derivate rispetto a τ:

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} = c \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_\sigma d\sigma \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \, \partial \tau} \left(Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) dt .$$

Infatti $\left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_c = 0$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \tau^2} = c \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_\sigma d\sigma \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial t \, \partial \tau^2} \left(Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) dt =$$

(¹) Infatti il termine additivo che risulterebbe derivando il limite superiore dell'ultimo integrale, è nullo per l'annullarsi di $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ nel limite stesso.

$$= c \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} \left(Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) dt.$$

Infatti $\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \, \partial \tau} \right]_c = 0$

e quindi:

$$\frac{\partial^3 B}{\partial \tau^3} = c \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_\sigma \left[Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_c \frac{d\sigma}{r}.$$

La prima riga del secondo membro della (18) diventa allora:

$$(19) \quad c \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_\sigma \left[Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_c \frac{d\sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial \eta} \int_\sigma \left[X \frac{\partial y}{\partial \nu} - Y \frac{\partial x}{\partial \nu} \right]_c \frac{d\sigma}{r} \right\}.$$

Trasformiamo ora l'ultimo termine della (18)

$$C = \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_\sigma \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \left(W \frac{\partial y}{\partial \nu} - V \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Avremo subito

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \int_\sigma d\sigma \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} - \frac{1}{r} \left(W \frac{\partial y}{\partial \nu} - V \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) dt$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2} = - \int_\sigma \left[W \frac{\partial y}{\partial \nu} - V \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_c \frac{d\sigma}{r}$$

$$(20) \qquad \frac{\partial^3 C}{\partial \tau^3} = -\int_\sigma \left[\dot{W}\frac{\partial y}{\partial \nu} - \dot{V}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right]_c \frac{d\sigma}{r}.$$

Dove il punto sovrastante V e W indica derivazione rispetto al tempo.

6. Prendiamo ora il primo dei tre termini della riga centrale:

$$D_1 = -c^2 \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_\sigma d\sigma \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\left(W\frac{\partial y}{\partial \nu} - V\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)$$

che potremo scrivere analogamente a quanto fatto sopra:

$$D_1 = c^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_\sigma \left(W\frac{\partial y}{\partial \nu} - V\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)\frac{d\Omega}{\partial x} d\sigma.$$

Trasformiamo l'integrale di superficie in integrale di spazio in questo modo.

Si consideri lo spazio S_{t_1} racchiuso dalle due superfici σ e σ_{t_1} considerando t_1 come un valore determinato e costante del tempo maggiore di $\tau - \frac{r}{c}$. Allora un integrale esteso a S_{t_1} darà luogo a due parti: la prima si riferirà alla σ, la seconda alla σ_{t_1}. Su quest'ultima la somma delle perturbazioni dal tempo zero al tempo $\tau - \frac{r}{c}$ è nulla e quindi è nullo il contributo portato da questa seconda superficie. Dunque:

$$D_1 = c^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_{S_{t_1}} dS\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \left(W\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} - V\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z}\right)\right].$$

Per gli altri due termini D_2 e D_3 della riga centrale della (18) avremo termini analoghi:

Sommando e tenendo presenti le (1) avremo:

$$D = D_1 + D_2 + D_3 =$$

$$= c\,\frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_{S_{t_1}} dS\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\,\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\,\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\,\frac{\partial Z}{\partial t}\right)$$

che si può scrivere:

$$D = c\,\frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_{S_{t_1}} dS\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Omega\,\frac{\partial X}{\partial t}\right) - \Omega\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial X}{\partial t} + \ldots\right]$$

essendo: $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$.

Si ha, ritrasformando in integrale di superficie con osservazioni analoghe a quelle fatte sopra:

$$D = c\,\frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^{\tau - \frac{r}{c}} dt \int_{\sigma} d\sigma\left(\frac{\partial X}{\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial Y}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{\partial Z}{\partial t}\,\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)\cdot \Omega\,.$$

Eseguiamo la triplice derivazione a τ. Avremo per es.:

$$\frac{\partial^3}{\partial \tau^3}\int_0^{\tau - \frac{r}{c}} \Omega\,.\,\frac{\partial X}{\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial \nu}\,dt =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\int_0^{\tau - \frac{r}{c}} - \frac{\left(t - \tau + \frac{r}{c}\right)^2}{2r}\,\frac{\partial X}{\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial \nu}\,dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau - \frac{r}{c}} \frac{t - \tau + \frac{r}{c}}{r} \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \nu} dt = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \nu} \left\{ [X]_c - X(0) \right\}.$$

Ora la derivata rispetto a ξ del termine $X(0)$ è nulla, quindi possiamo trascurare questo termine.

Procedendo analogamente per gli altri termini si ha:

$$\frac{\partial^3 D}{\partial \tau^3} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} \int_\sigma \left[X \frac{\partial x}{\partial \nu} + Y \frac{\partial y}{\partial \nu} + Z \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_c \frac{d\sigma}{r}. \tag{21}$$

7. Raccogliendo assieme i risultati (17), (19), (20), e (21) arriviamo alla formula:

$$4\pi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_\sigma \left[Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_c \frac{d\sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial \eta} \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \left[X \frac{\partial y}{\partial \nu} - Y \frac{\partial x}{\partial \nu} \right]_c + \tag{22}$$

$$+ \frac{1}{c} \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \left[\dot{V} \frac{\partial z}{\partial \nu} - \dot{W} \frac{\partial y}{\partial \nu} \right]_c - \frac{\partial}{\partial \xi} \int_\sigma \left[X \frac{\partial x}{\partial \nu} + Y \frac{\partial y}{\partial \nu} + Z \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_c \frac{d\sigma}{r},$$

che è la prima delle formule cercate; in essa ν rappresenta la normale alla superficie σ rivolta all'esterno.

Con semplici sostituzioni circolari sulle soluzioni caratteristiche (11), si troverebbero i valori di Y e Z nel punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ al tempo τ. Essi valori si hanno immediatamente dalla (22) eseguendo sostituzioni circolari sulle quantità impiegate.

Usando invece delle (11) le soluzioni caratteristiche (11′) si otterrebbero le componenti della forza magnetica. La prima di esse risulta espressa così:

$$4\pi U(\xi, \eta, \zeta, \tau) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \left[W \frac{\partial x}{\partial \nu} - V \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_c - \frac{\partial}{\partial \eta} \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \left[U \frac{\partial y}{\partial \nu} - V \frac{\partial x}{\partial \nu} \right]_c - \tag{23}$$

$$(23)\qquad -\frac{1}{c}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r}\left[\dot{Y}\frac{\partial z}{\partial \nu}-\dot{Z}\frac{\partial y}{\partial \nu}\right]_c-\frac{\partial}{\partial \xi}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r}\left[U\frac{\partial x}{\partial \nu}+V\frac{\partial y}{\partial \nu}+W\frac{\partial z}{\partial \nu}\right]_c.$$

Con sostituzioni calcolari si otterrebbero le altre due.

I risultati ottenuti si riuniscono così:

$$(24)\qquad \begin{cases} 4\pi\,\mathbf{F}(P,\tau)=-\operatorname{rot}\displaystyle\int_\sigma [\mathbf{F}\wedge\nu]_c\frac{d\sigma}{r}+ \\ \displaystyle+\frac{1}{c}\int_\sigma\left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\wedge\nu\right]_c\frac{d\sigma}{r}-\operatorname{grad}\int_\sigma[\mathbf{H}\times\nu]_c\frac{d\sigma}{r} \\ 4\pi\,\mathbf{H}(P,\tau)=-\operatorname{rot}\displaystyle\int_\sigma[\mathbf{H}\wedge\nu]_c\frac{d\sigma}{r}- \\ \displaystyle-\frac{1}{c}\int_\sigma\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\wedge\nu\right]_c\frac{d\sigma}{r}-\operatorname{grad}\int_\sigma[\mathbf{H}\times\nu]_c\frac{d\sigma}{r}. \end{cases}$$

Le formule (24) che abbiamo così ottenute con un procedimento del tutto elementare, sono, si può dire, l'espressione analitica precisa del principio di Huygens per le onde elettromagnetiche. Infatti esse ci dicono chiaramente che lo stato della perturbazione in un punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ al tempo τ, si può considerare prodotto dalla somma degli infiniti contributi provenienti da "centri di scuotimento" elettromagnetici esistenti sulla superficie σ al tempo $\tau-\frac{r}{c}$, cioè in un tempo di tanto anteriore quant'è necessario alla perturbazione per propagarsi da σ a P.

Secondo l'impostazione da noi data al problema (problema esterno), ciò risulta nel modo più naturale; si può dire quasi, che l'immediato significato fisico segua passo a passo la trattazione analitica.

Non altrettanto può dirsi delle precedenti trattazioni in cui il problema esterno e quindi il principio di Huygens abbisognavano di speciali limitazioni sulle funzioni impiegate.

Il Tedone ha dato le formule (24) nella sua nota del 1916 deducendola da altre più complesse da lui ottenute in una trattazione più generale. Le stesse formule, in forma però molto diversa, erano già state date dal LOVE del 1900.

Nell' appendice che segue dimostreremo appunto che le formule del LOVE coincidono con quelle del TEDONE e che quindi al LOVE, almeno sotto un certo punto di vista, ne spetta la priorità.

APPENDICE: Coincidenze delle formule di LOVE con quelle del TEDONE.

1. Usando, per indicare le varie quantità, i simboli usati nel nostro lavoro, la prima componente della forza elettrica è data, secondo il TEDONE (¹) dall' espressione:

$$(A) \qquad 4\pi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \left[Z \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_c - \frac{\partial}{\partial \eta} \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \left[X \frac{\partial y}{\partial \nu} - Y \frac{\partial x}{\partial \nu} \right]_c +$$

$$+ \frac{1}{c} \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \left[\dot{V} \frac{\partial z}{\partial \nu} - \dot{W} \frac{\partial y}{\partial \nu} \right]_c - \frac{\partial}{\partial \xi} \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \left[X \frac{\partial x}{\partial \nu} + Y \frac{\partial y}{\partial \nu} + Z \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_c$$

e secondo il LOVE (²) da:

$$(B) \qquad 4\pi X(\xi, \eta, \zeta, \tau) =$$

$$= \int_\sigma d\sigma \left\{ - \frac{y - \eta}{r^3} \left[\left(Y \frac{\partial x}{\partial \nu} - X \frac{\partial y}{\partial \nu} \right) + \frac{r}{c} \left(\dot{Y} \frac{\partial x}{\partial \nu} - \dot{X} \frac{\partial y}{\partial \nu} \right) \right]_c + \right.$$

$$+ \frac{z - \zeta}{r^3} \left[\left(X \frac{\partial z}{\partial \nu} - Z \frac{\partial x}{\partial \nu} \right) + \frac{r}{c} \left(\dot{X} \frac{\partial z}{\partial \nu} - \dot{Z} \frac{\partial x}{\partial \nu} \right) \right]_c +$$

(¹) Vedi la nota *A* già citata nella introduzione.
(²) Vedi la memoria " *The integration ecc.* ", già citata.

$$+c\left[\frac{2}{r^3}-3\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{r^5}\right]\left[w\frac{\partial y}{\partial \nu}-v\frac{\partial z}{\partial \nu}+\frac{r}{c}\left(\dot{w}\frac{\partial y}{\partial \nu}-\dot{v}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)\right]_c-$$

$$-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{c\,r^3}\left[\ddot{w}\frac{\partial y}{\partial \nu}-\ddot{v}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right]_c+$$

$$+\frac{c(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}\left[3\left(u\frac{\partial z}{\partial \nu}-w\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)+3\frac{r}{c}\left(\dot{u}\frac{\partial z}{\partial \nu}-\dot{w}\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{r^2}{c^2}\left(\ddot{u}\frac{\partial z}{\partial \nu}-\ddot{w}\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)\right]_c+$$

$$+\frac{c(x-\xi)(z-\zeta)}{r^5}\left[3\left(v\frac{\partial x}{\partial \nu}-u\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)+3\frac{r}{c}\left(\dot{v}\frac{\partial x}{\partial \nu}-\dot{u}\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{r^2}{c^2}\left(\ddot{v}\frac{\partial x}{\partial \nu}-\ddot{u}\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)\right]_c$$

dove come al solito $[f]_c$ indica il valore di f al tempo $\tau-\frac{r}{c}$ ed (u, v, w) sono le componenti dello spostamento magnetico e sono tali che:

$$(U, V, W)=\frac{\partial}{\partial t}(u, v, w)\,.$$

I punti poi indicano derivate rispetto al tempo.

Per dimostrare la coincidenza delle formule (A) e (B) ci serviamo di alcune importanti trasformazioni trovate dal Somigliana [1] riguardanti le funzioni del tipo:

$$\int [f]_c\frac{d\sigma}{r}$$

che vengono chiamate " potenziali ritardati ".

[1] C. Somigliana: *Sopra alcune formule fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi*. Atti R. Acc. delle Scienze Torino: tre note, Vol. 41, pg. 869 e 1070; Vol. 42 pg. 763.

2. Esaminiamo le prime due righe della formula (B). Si ha evidentemente:

$$-\frac{y-\eta}{r^3}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,;\qquad \frac{z-\zeta}{r^3}=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,.$$

Ponendo poi con SOMIGLIANA:

$$[f]_c^*=\left[f+\frac{r}{c}\dot{f}\right]_c\,.$$

Avremo questa prima parte scritta nella forma:

$$B_1=\int_\sigma d\sigma\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\left[Y\frac{\partial x}{\partial\nu}-X\frac{\partial y}{\partial\nu}\right]_c^*-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[X\frac{\partial z}{\partial\nu}-Z\frac{\partial x}{\partial\nu}\right]_c^*\right\}.$$

E ricordando che per le formule di derivazione dei potenziali ritardati (SOMIGLIANA nota 1ª Cap. V) se:

$$I\int_\sigma[\varphi]_c\frac{d\sigma}{r}\qquad\text{si ha}\quad\frac{\partial I}{\partial\xi}=-\int_\sigma[\varphi]_c^*\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\sigma$$

potremo, applicando la formula all'inverso, scrivere:

$$B_1=-\frac{\partial}{\partial\eta}\int_\sigma\left[Y\frac{\partial x}{\partial\nu}-X\frac{\partial y}{\partial\nu}\right]_c\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_\sigma\left[X\frac{\partial z}{\partial\nu}-Z\frac{\partial x}{\partial\nu}\right]_c\frac{d\sigma}{r}$$

che coincide colla prima parte della formula (A).

La parte rimanente della formula (B) si può scrivere in questa forma:

$$B_2=c\int_\sigma d\sigma\left\{\left[-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-\xi)^2}{r^5}\right]\left[w\frac{\partial y}{\partial\nu}-v\frac{\partial z}{\partial\nu}\right]_c^*+\right.$$

$$+\frac{(x-\xi)^2}{r^3c^2}\left[\ddot{w}\frac{\partial y}{\partial \nu}-\ddot{v}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right]_c+\frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}\cdot\left[u\frac{\partial z}{\partial \nu}-w\frac{\partial x}{\partial \nu}\right]_c^*+$$

$$+\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{c^2r^3}\left[\ddot{u}\frac{\partial z}{\partial \nu}-\ddot{w}\frac{\partial x}{\partial \nu}\right]_c+\frac{3(x-\xi)(z-\zeta)}{r^5}\cdot\left[v\frac{\partial x}{\partial \nu}-u\frac{\partial y}{\partial \nu}\right]_c^*+$$

$$+\frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{c^2r^3}\left[\ddot{v}\frac{\partial x}{\partial \nu}-\ddot{u}\frac{\partial y}{\partial \nu}\right]_c\Bigg\}-\frac{1}{c}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r}\left[\ddot{w}\frac{\partial y}{\partial \nu}-\ddot{v}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right]_c.$$

Si verifica ora facilmente che:

$$-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-\xi)^2}{r^5}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial \xi\,\partial \eta}$$

$$\frac{3(x-\xi)(z-\zeta)}{r^5}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial \zeta\,\partial \xi}.$$

Ed osservando anche che:

$$\frac{(x-\xi)^2}{r^2}=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2;\quad \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^2}=\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial y};$$

$$\frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r^2}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}$$

si avrà:

$$B_2=c\int_\sigma\Bigg\{\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\left[w\frac{\partial y}{\partial \nu}-v\frac{\partial z}{\partial \nu}\right]_c^*+\frac{1}{c^2r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\left[\ddot{w}\frac{\partial y}{\partial \nu}-\ddot{v}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right]_c+$$

$$+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\left[u\frac{\partial z}{\partial \nu}-w\frac{\partial x}{\partial \nu}\right]_c^*+\frac{1}{c^2r}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\left[\ddot{u}\frac{\partial z}{\partial \nu}-\ddot{w}\frac{\partial x}{\partial \nu}\right]_c+$$

$$+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\left[v\frac{\partial x}{\partial\nu}-u\frac{\partial y}{\partial\nu}\right]_c^* + \frac{1}{c^2 r}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\left[\ddot{v}\frac{\partial x}{\partial\nu}-\ddot{u}\frac{\partial y}{\partial\nu}\right]_c\Bigg\}\,d\sigma -$$

$$-\frac{1}{c}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r}\left[\ddot{w}\frac{\partial y}{\partial\nu}-\ddot{v}\frac{\partial z}{\partial\nu}\right]_c.$$

Ricorriamo ancora alle formule di derivazione dei potenziali ritardati. Si ha (v. ancora Nota I Cap. 5):

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int_\sigma[f]_c\frac{d\sigma}{r}=\int_\sigma[f]_c^*\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}d\sigma+\frac{1}{c^2}\int_\sigma[\ddot{f}]_c\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d\sigma}{r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\int_\sigma[f]_c\frac{d\sigma}{r}=\int_\sigma[f]_c^*\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}d\sigma+\frac{1}{c^2}\int_\sigma[\ddot{f}]_c\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\sigma}{r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\xi}\int_\sigma[f]_c\frac{d\sigma}{r}=\int_\sigma[f]_c^*\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}d\sigma+\frac{1}{c^2}\int_\sigma[\ddot{f}]_c\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d\sigma}{r}.$$

La B_2 diventa così:

$$B_2=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int_\sigma c\left[w\frac{\partial y}{\partial\nu}-v\frac{\partial z}{\partial\nu}\right]_c\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\int_\sigma c\left[u\frac{\partial z}{\partial\nu}-w\frac{\partial x}{\partial\nu}\right]_c\frac{d\sigma}{r}+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}\int_\sigma c\left[v\frac{\partial x}{\partial\nu}-u\frac{\partial y}{\partial\nu}\right]_c\frac{d\sigma}{r}-\frac{1}{c}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r}\left[\ddot{w}\frac{\partial y}{\partial\nu}-\ddot{v}\frac{\partial z}{\partial\nu}\right]_c.$$

Trasformiamo gli integrali di superficie in integrali di spazio. (Sarà lo spazio racchiuso dalla superficie chiusa σ se si considera il problema interno: Se come noi abbiamo fatto, si considera il problema esterno, si prenderà lo spazio S_{t_1} compreso fra σ

e σ_{t_1} con $t_1 > \tau - \frac{r}{c}$ in modo che sulla σ_{t_1} si annullino tutte le funzioni rappresentanti le perturbazioni). Si avrà per es.:

$$\int_\sigma c\left[w\frac{\partial y}{\partial\nu} - v\frac{\partial z}{\partial\nu}\right]_c \frac{d\sigma}{r} = \int_S c\left[\frac{\partial\frac{w}{r}}{\partial y} - \frac{\partial\frac{v}{r}}{\partial z}\right]_c dS =$$

$$= \int_S c\left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right]_c \frac{dS}{r} + \int_S c\left[w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]_c dS =$$

$$= \int_S [X]_c \frac{dS}{r} + \int_S c\left[w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]_c dS.$$

In conseguenza, osservando che questi ultimi termini accessori si elidono quando si consideri la loro somma con quelli analoghi, abbiamo:

$$B_2 = -\frac{\partial}{\partial\xi}\int_\sigma\left[X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right]_c dS - \frac{1}{c}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r}\left[\ddot{w}\frac{\partial y}{\partial\nu} - \ddot{v}\frac{\partial z}{\partial\nu}\right]_c;$$

formola che possiamo scrivere a questo modo:

$$B_2 = -\frac{\partial}{\partial\xi}\cdot\int_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{X}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{Y}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{Z}{r}\right]_c dS +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\xi}\int_S\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right]_c \frac{dS}{r} - \frac{1}{c}\int_\sigma\frac{d\sigma}{r}\left[\ddot{w}\frac{\partial y}{\partial\nu} - \ddot{v}\frac{\partial z}{\partial\nu}\right]_c.$$

Notiamo ora che essendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(X, Y, Z) = 0 ,$$

si annulla il secondo integrale perchè $[\operatorname{div} X, Y, Z]_c$ dipende da ξ solo mediante $\left(\tau - \frac{r}{c}\right)$ e quindi si può ritrasformare il primo integrale in integrale di superficie con osservazioni analoghe a quelle fatte sopra. Arriviamo così ad ottenere per B_2 la forma definitiva:

$$B_2 = - \frac{\partial}{\partial \xi} \int_\sigma \left[X \frac{\partial x}{\partial \nu} + Y \frac{\partial y}{\partial \nu} + Z \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_c \frac{d\sigma}{r} +$$

$$+ \frac{1}{c} \int \frac{d\sigma}{r} \left[\dot{V} \frac{\partial y}{\partial \nu} - \dot{W} \frac{\partial x}{\partial \nu} \right]_c .$$

Risulta quindi definitivamente dimostrata l'identità della formula (B) colla formula (A).

In modo perfettamente analogo si dimostrerebbe l'identità delle altre componenti.